РОЗДІЛ I: ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Лекція 1.

Тема: Елементи теорії матриць.

1. Матриці.

2. Дії над матрицями.

1. Матриці.

Нехай задано множину чисел, розміщених у вигляді квадратної таблиці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1).$$

Таку впорядковану множину називають матрицею *(m*x*n)*. Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі. Коротко матрицю позначають так: $A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$, або $A = \left\|a_{ij}\right\|_{mn}$. В цьому записі вказується кількість рядків i та стовбців j матриці.

Озн.1. **Матрицею** називається упорядкована по рядках та стовпцях таблиця елементів: букв, чисел, функцій тощо. Так, наприклад, сторінка газети є матрицею, оскільки вона має рядки тексту і стовпці у вигляді колонок тексту.

Матриці позначають великими латинськими літерами *A, B, C* тощо.

Числа a_{ij} називають елементами матриці.

Добуток числа рядків m на число стовбців n називають розміром матриці і позначають mxn

Матриці мають однакові розміри, якщо у них однакова кількість рядків і стовбців.

Озн.2. Матриці A та B називають рівними між собою, якщо вони мають однакові розміри, а їх елементи, що знаходять на однакових місцях, рівні між собою. При цьому пишуть $A = B$.

Озн.3. Квадратною називають таку матрицю $A=(a_{ij})_{mn}$, в якій $m=n$, тобто кількість рядочків дорівнює кількості стовпчиків.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Озн.4. Діагональною називають матрицю, по головній діагоналі якої розташовані елементи a_{ij}, а інші елементи є нулями, тобто

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{mm}\end{pmatrix}.$$

Озн.5. Одиничною називають діагональну матрицю, по головній діагоналі якої розташовані одиниці, тобто $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$.

Озн.6. Нульовою називають матрицю, всі елементи якої нулі:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

Властивість: Якщо до заданої матриці A додати нульову, то отримаємо задану матрицю A.

2. Дії над матрицями:

Нехай задано матриці A та B: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -11 & 4 & 5\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

1. Сума матриць.

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць однакового розміру. Сумою матриць $A=\left(a_{ij}\right)_{mn}$ та $B=\left(b_{ij}\right)_{mn}$ називається матриця $C=\left(c_{ij}\right)_{mn}$, де $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. При цьому записують $C=A+B$.

Приклад 1:

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+0 & -2+1 & 0+0 \\ 3+(-11) & 5+4 & -3+5 \\ 2+(-3) & 0+(-1) & -1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 9 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Властивість: Для довільних матриць *A*, *B* та *C* однакових розмірів справджуються рівності: $A+B=B+A$; $(A+B)+C=A+(B+C)$.

2. Добуток матриці на число.

Добутком матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{mn}$ на число λ називається матриця $C=\left(c_{ij}\right)_{mn}$, де $c_{ij}=\lambda a_{ij}$. При цьому записують $C=\lambda A$.

Приклад 2:

$$-4\cdot A=\begin{pmatrix} -4\cdot 1 & -4\cdot(-2) & -4\cdot 0 \\ -4\cdot 3 & -4\cdot 5 & -4\cdot(-3) \\ -4\cdot 2 & -4\cdot 0 & -4\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ -12 & -20 & 12 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Віднімання матриць.

Різницю матриць *A* та *B* розглядають, як суму матриць *A* та *–B*, при чому матриця *–B* утворена множенням матриці *B* на *–1*.

Властивості додавання та множення на число:

Для довільних матриць *A*, *B* однакових розмірів та довільних чисел μ і λ справджуються рівності:

1) $A+B=B+A$ – комутативність відносно додавання матриць;

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ – асоціативність відносно додавання матриць;

3) $A+0=A$; $A-A=0$ – роль нульової матриці в діях над матрицями така, як числа нуль в діях над числами;

4) $(\lambda\cdot\mu)\cdot A=\lambda\cdot(\mu\cdot A)$ – асоціативність відносно множення чисел;

5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ – дистрибутивність множення на число відносно додавання матриць;

6) $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$ – дистрибутивність множення на матрицю відносно додавання чисел.

4. Добуток матриць.

Операція множення матриць вводиться лише для узгоджених матриць.

Озн.7. Матриця називається узгодженою, якщо кількість стовпців першої дорівнює кількості рядків другої.

Якщо ця умова не виконується, тобто матриці неузгоджені, то множення таких матриць неможливе.

З узгодженості матриці *A* з матрицею *B* випливає узгодженість матриці *B* з матрицею *A*. Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

Добутком матриці $A=(a_{ij})_{mn}$ на матрицю $B=(b_{ij})_{ns}$ називається матриця $C=(c_{ij})_{mn}$, де $c_{ij}=\overline{a_i}\cdot\overline{b_j}$ ($\overline{a_i}$ – *i-й* рядок першої матриці, $\overline{b_j}$ – *j-й* стовбець другої матриці). Тобто, щоб визначити елемент c_{24}, що стоїть в другому рядку і четвертому стовбці матриці $C=AB$, потрібно знайти суму добутків елементів другого рядка матриці *A* на відповідні елементи четвертого стовпці матриці *B*. При цьому записують $C=A\cdot B$.

Приклад:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -11 & 4 & 5\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 0+(-2)\cdot(-11)+0\cdot(-3) & 1\cdot 1+(-2)\cdot 4+0\cdot(-1) & 1\cdot 0+(-2)\cdot 5+0\cdot 2\\ 3\cdot 0+5\cdot(-11)+(-3)\cdot(-3) & 3\cdot 1+5\cdot 4+(-3)\cdot(-1) & 3\cdot 0+5\cdot 5+(-3)\cdot 2\\ 2\cdot 0+0\cdot(-11)+(-1)\cdot(-3) & 2\cdot 1+0\cdot 4+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot 0+0\cdot 5+(-1)\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}22 & -7 & -10\\ -46 & 26 & 19\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Перевіримо чи справджується переставний закон множення для матриць:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 3 + 0\cdot 2 & 0\cdot(-2) + 1\cdot 5 + 0\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot(-3) + 0\cdot(-1) \\ -11\cdot 1 + 4\cdot 3 + 5\cdot 2 & -11\cdot(-2) + 4\cdot 5 + 5\cdot 0 & -11\cdot 0 + 4\cdot(-3) + 5\cdot(-1) \\ -3\cdot 1 - 1\cdot 3 + 2\cdot 2 & -3\cdot(-2) - 1\cdot 5 + 2\cdot 0 & -3\cdot 0 - 1\cdot(-3) + 2\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 11 & 42 & -17 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, переставний закон множення для матриць не справджується $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Властивості множення матриць:

Для довільних матриць *A*, *B* однакових розмірів та довільних чисел μ і λ справджуються рівності:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ – асоціативність відносно множення матриць;

2) $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$ – роль нульової матриці в діях над матрицями така, як числа нуль в діях над числами;

3) $(\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (B \cdot A)$ – асоціативність відносно множення матриць і числа;

4) $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$; $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ – дистрибутивність множення відносно додавання матриць;

6) $A \cdot E = E \cdot A = A$ – роль одиничної матриці в діях над матрицями така, як одиниці в діях над числами;

5. Піднесення матриці до степеня.

Піднесення матриці до степеня *n* розглядають, як множення матриці саму на себе *n* раз.

<u>Приклад</u>:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot1-2\cdot3+0\cdot2 & 1\cdot(-2)-2\cdot5+0\cdot0 & 1\cdot0-2\cdot(-3)+0\cdot(-1) \\ 3\cdot1+5\cdot3-3\cdot2 & 3\cdot(-2)+5\cdot5-3\cdot0 & 3\cdot0+5\cdot(-3)-3\cdot(-1) \\ 2\cdot1+0\cdot3-1\cdot2 & 2\cdot(-2)+0\cdot5-1\cdot0 & 2\cdot0+0\cdot(-3)-1\cdot(-1) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & -12 & 6 \\ 12 & 19 & -12 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Транспонування матриць.

Щоб транспонувати матрицю $A=(a_{ij})_{mn}$ необхідно створити матрицю $A^T=(a_{ji})_{nm}$, тобто рядочки замінити стовбцями.

Приклад:

$$A^T=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$