РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Лекція 10.

Тема: **Похідна та диференціал функції.**

1. Поняття похідної.
2. Механічний та геометричний зміст похідної.
3. Основні формули диференціювання.
4. Диференціал функції.
5. Особливі випадки диференціювання:

а) похідна неявної функції;

б) похідна функції, заданої параметрично;

в) похідна показникової функції;

г) похідна логарифмічної функції.

1. Поняття похідної.

Поняття похідної є одним з основних понять математичного аналізу. Розділ математики, в якому вивчається поняття похідної та її застосування до дослідження функцій, називають диференціальним численням.

У загальних рисах побудову диференціального числення було завершено у працях англійського фізика, астронома та математика І. Ньютона (1643–1727) та німецького філософа та математика Г. Лейбніца (1646–1716) до кінця XVII ст. Ньютон прийшов до поняття похідної, розглядаючи задачу про миттєву швидкість матеріальної точки, а Лейбніц під час розв'язування задачі про дотичну до кривої.

Строге обґрунтування диференціального числення на основі теорії границь дав на початку XIX століття французький математик О. Коші.

Озн. 1: Похідною функції в точці x_0 називається граничне відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу в цій же точці, якщо останній прямує до нуля.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \qquad (1)$$

Виходячи з означення, можна отримати такий алгоритм знаходження похідної $f'(x)$ у точці x:

1) задайте приріст аргументу $\Delta x \neq 0$ і запишіть значення функції, що відповідає значенню аргументу $x + \Delta x$: $f(x + \Delta x)$;

2) знайдіть приріст функції, який відповідає приросту аргументу Δx: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

3) знайти границю: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$.

2. Механічний та геометричний зміст похідної.

Задачі про миттєву швидкість та дотичну до кривої дають механічний та геометричний зміст похідної.

Механічний зміст похідної: величина миттєвої швидкості в момент часу t_0 дорівнює значенню похідної від шляху у точці t_0. Тобто $v(t_0) = s'(t_0)$.

Геометричний зміст похідної: похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ у точці x_0 є значенням кутового коефіцієнта дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0. Тобто $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0;\ y_0)$ має вигляд: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

3. Основні формули диференціювання.

Запишемо основні правила та формули диференціювання:

функція	похідна
$y = c \cdot u$	$y' = c \cdot u'$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

№	функція	похідна	№	функція	похідна
1.	$y = C(const)$	$y' = 0$	2.	$y = x$	$y' = 1$
3.	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	4.	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5.	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	6.	$y = e^x$	$y' = e^x$
7.	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	8.	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
9.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	10.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
11.	$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	12.	$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13.	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14.	$y = arccosx$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15.	$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	16.	$y = arcctgx$	$y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$

<u>Приклад:</u> Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7$; б) $y = \sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{5x^{13}}$; в) $y = \cos x \cdot \log_9 x$;

г) $y = \frac{\arcsin x}{\ln x}$; д) $y = \sqrt{tg\left(x^3 - 4x\right)}$.

Розв'язання:

Для знаходження похідних функцій користуємося таблицею похідних (Табл. 1 додатку).

а) $y = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7$.

$$y' = 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 = 12x^2 - x;$$

б) $y = \sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{5x^{13}}$.

Скористаємося властивостями степеня $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$, отримаємо:

$$y = \sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{5x^{13}} = x^{\frac{3}{7}} + \frac{4}{5}x^{-13}.$$

Тоді похідна функції $y' = \frac{3}{7} \cdot x^{\frac{3}{7}-1} + \frac{4}{5} \cdot (-13) \cdot x^{-13-1} = \frac{3}{7} x^{-\frac{4}{7}} - \frac{52}{5} x^{-14} = \frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}} - \frac{52}{5x^{14}}$.

в) $y = \cos x \cdot \log_9 x$.

Скористаємося формулою похідної добутку: $(uv)' = u'v + uv'$, тоді $y' = (\cos x)' \cdot \log_9 x + \cos x \cdot (\log_9 x)' = -\sin x \cdot \log_9 x + \cos x \cdot \frac{1}{x \ln 9}$

г) $y = \frac{\arcsin x}{\ln x}$.

Скористаємося формулою похідної частки: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, тоді

$$y = \frac{(\arcsin x)' \cdot \ln x - \arcsin x \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln x - \arcsin x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}.$$

д) $y = \sqrt{tg(x^3 - 4x)}$. Враховуючи, що функція складена, то її похідна дорівнюватиме: $y' = \frac{1}{2\sqrt{tg(x^3 - 4x)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^3 - 4x)} \cdot (3x^2 - 4)$.

4. Диференціал функції.

Озн. 2: Функція називається диференційованою в точці х, якщо її приріст в цій точці можна подати у вигляді: $\Delta f(x) = A(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x$, де $A(x)$ – дійсне число, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x, \Delta x) = 0$.

Маючи таке означення можна сформулювати необхідну і достатню умову диференційованості функції.

Теорема: Щоб функція $f(x)$ була диференційована у точці x_0, необхідно і достатньо, щоб вона в цій точці мала похідну.

Озн. 3: Якщо функція $f(x)$ диференційована у точці x_0, то вираз $f'(x)\Delta x$ називають диференціалом даної функції у точці x і позначають $df(x)$ або dy.

5. Особливі випадки диференціювання.

а) Похідна неявної функції.

Якщо функція задана неявно $f(xy)=a$, необхідно знайти похідну від лівої та правої частини, пам'ятаючи, що y є деякою функцією від x.

<u>Приклад:</u> Знайти похідну функції $\sin(x+y)+\ln(x-y)=4$.

Дана функція задана неявно, тому знаходимо похідну від лівої та правої частини, пам'ятаючи, що y є деякою функцією від x:

$$(\sin(x+y)+\ln(x-y))'=4'\Rightarrow$$

$$\left(\sin(x+y)\right)'+\left(\ln(x-y)\right)'=0\Rightarrow \cos(x+y)\cdot(1+y')+\frac{1-y'}{x-y}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(x+y)+\frac{1}{x-y}+y'(\cos(x+y)-\frac{1}{x-y})=0\Rightarrow y'=-\frac{\cos(x+y)+\frac{1}{x-y}}{\cos(x+y)-\frac{1}{x-y}}.$$

б) Похідна функції, заданої параметрично.

Якщо функція задана параметрично, тобто у вигляді: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, то похідна обчислюється за формулою: $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$.

<u>Приклад:</u> Знайти похідну функції $\begin{cases} x=\cos\left(t^2+1\right) \\ y=\sin\left(t^2+1\right) \end{cases}$.

Функція задана параметрично, тому похідна функції:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-\sin\left(t^2+1\right)\cdot 2t}{\cos\left(t^2+1\right)\cdot 2t}=-tg\left(t^2+1\right).$$

в) Похідна показникової функції.

Для знаходження похідної, що подана у вигляді $f(x)=u(x)^{v(x)}$ необхідно про логарифмувати функцію зліва та справа за основою e і перейти до знаходження похідної добутку.

<u>Приклад:</u> Знайти похідну функції $y=\left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}$.

Функція задана у вигляді $f(x)=u(x)^{v(x)}$, тому прологарифмуємо функцію зліва та справа за основою e:

$\ln y = \ln\left(x^3 + 3x^2 + 4\right)^{\sin 4x}$, або $\ln y = \sin 4x \cdot \ln\left(x^3 + 3x^2 + 4\right)$;

Для знаходження похідної скористаємося формулою добутку:

$$y' \cdot \frac{1}{y} = 4\cos 4x \cdot \ln\left(x^3 + 3x^2 + 4\right) + \sin 4x \cdot \frac{1}{x^3 + 3x + 4} \cdot \left(3x^2 + 6x\right);$$

Тоді шукана похідна:

$$y' = 4\cos 4x \cdot \left(x^3 + 3x^2 + 4\right)^{\sin 4x} \cdot \ln\left(x^3 + 3x^2 + 4\right) + \sin 4x \cdot \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x + 4} \cdot \left(x^3 + 3x^2 + 4\right)^{\sin 4x}.$$

г) Похідна логарифмічної функції.

Якщо функція подана у вигляді $\log_{\psi(x)} \varphi(x)$ необхідно перейти до нової основи логарифма (наприклад *e*), скориставшись формулою: $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$.

<u>Приклад:</u> Знайти похідну функції $y = \log_{\sin x}(1 + \sqrt{x})$.

Перейдемо до нової основи логарифма (наприклад *e*), скориставшись формулою: $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$, тоді

$$y = \log_{\sin x}(1 + \sqrt{x}) = \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\ln \sin x} \Rightarrow y' = \frac{(\ln(1 + \sqrt{x}))' \cdot \ln \sin x - \ln(1 + \sqrt{x}) \cdot (\ln \sin x)'}{(\ln \sin x)^2} =$$

$$\frac{\dfrac{1}{1 + \sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \sin x - \ln(1 + \sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{\ln^2 \sin x} =$$

$$\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x \ln \sin x - \cos x (1 + \sqrt{x}) \ln(1 + \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x}) \cdot \sin x \cdot \ln^2 \sin x}.$$