**Лекція 11.**

Тема: **Диференціал та похідна функції та їх застосування.**

1. Застосування диференціалу до наближеного обчислення функції.
2. Означення максимуму та мінімуму функції.
3. Знаходження асимптот графіка функції.
4. Застосування похідної до дослідження динаміки функції.
5. Задачі про найбільші та найменші значення величини (на самостійне опрацювання).

### 1. Застосування диференціалу до наближеного обчислення функції.

Для більшості функцій існують значення $x$, при яких обмеження самої функції викликає певні труднощі. Наприклад: $\sqrt{37}$, $\sin 32^0$, $2^{1,73}$ тощо. В більшості випадків "зручних" значень $x$ набагато менше, ніж "незручних". Нехай $x_0 -$ одне із "зручних" значень, для якого $y_0 = f(x_0)$ обчислюється елементарно. Існує $x_1$ "незручне" значення, для якого $y_1 = f(x_1)$ знаходиться з великими труднощами (великий об'єм обчислень). Величина $x_1$ відрізняється від $x_0$ на величину $\Delta x$; $x_1 = x_0 + \Delta x$. Тоді між $y_0$ та $y_1$ існує свій приріст $\Delta y$, тобто $y_1 = y_0 + \Delta y$. Якби ми знали значення $\Delta y$, то $y_1$ могли б знайти без проблем. З поняття диференціала відомо, що при малих значеннях $\Delta x$ приріст функції $\Delta y$ наближено дорівнює приросту дотичної $dy$, проведеної до $f(x)$ в точці $x_0$. Тому $y_1 = y_0 + \Delta y \approx y_0 + dy = y_0 + y' \cdot \Delta x$, де $y'$ знаходиться як тангенс кута нахилу дотичної в точці $x_0$. Тому $y'$ є конкретним значенням похідної в точці $x_0$. Маємо робочу формулу:

$$y_1 \approx y_0 + y' \cdot \Delta x, \tag{1}$$

точність якої збільшується зі зменшенням $\Delta x$.

П р и к л а д: Знайти наближено значення функції:
а) $y = \sqrt[3]{5x^2 + 10x + 5}$ при $x = 4{,}03$.
б) $\sin 63^\circ$.

*Розв'язання:*

Значення функції обчислимо за формулою: $y \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x$.

а) $y=\sqrt[3]{5x^2+10x+5}$ при $x=4{,}03$.
Нехай $x_0=4$, тоді $\Delta x=x-x_0=0{,}03$.
$y(x_0)=\sqrt[3]{5\cdot 4^2+10\cdot 4+5}=\sqrt[3]{125}=5$;
$y'=\frac{10x+10}{3\sqrt[3]{(5x^2+10x+5)}}$; $y'(4)=\frac{10\cdot 4+10}{3\sqrt[3]{(5\cdot 4^2+10\cdot 4+5)}}=\frac{50}{3\cdot 25}=\frac{2}{3}$;
$y\approx y(x_0)+y'(x_0)\cdot\Delta x=5+\frac{2}{3}\cdot 0{,}03=5{,}01$.

б) $\sin 63^\circ$.
Нехай $y=\sin x$, $x=63^\circ$, $x=60^\circ$, тоді $\Delta x=x-x_0=3^\circ=\frac{3\cdot 3{,}14}{180}=0{,}052$.
$y(x_0)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}866$;
$y'(60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=0{,}5$;
$\sin 60^\circ\approx y(x_0)+y'(x_0)\cdot\Delta x=0{,}866+0{,}5\cdot 0{,}052=0{,}892$.

**2. Означення максимуму та мінімуму функції.**

Функція $f(x)$ має в точці $x = x_0$ максимум, якщо значення функції в цій точці більше, ніж її значення в усіх точках, достатньо близьких до $x_0$.

Тобто, функція $f(x)$ має максимум при $x = x_0$, якщо $f(x_0+\Delta x) < f(x_0)$, для будь-якого $\Delta x$ – як додатного, так і від'ємного, але достатньо малих за абсолютною величиною.

Функція $f(x)$ має в точці $x = x_0$ мінімум, якщо значення функції в цій точці менше, ніж її значення в усіх точках, достатньо близьких до $x_0$. Тобто, функція $f(x)$ має мінімум при $x = x_0$, якщо $f(x_0+\Delta x) > f(x)$ ,для будь-якого $\Delta x$ – як додатного, так і від'ємного, але достатньо малих за абсолютною величиною.

Якщо в деякій точці функція має максимум або мінімум, то говорять, що в цій точці має місце екстремум.

Слід пам'ятати:

1. Максимум (мінімум) не являється обов'язково найбільшим (найменшим) значенням, що приймає функція. Поза розглянутого околу точки $x_0$ функція може приймати більші (менші) значення, ніж в цій точці.

2. Функція може мати, .декілька максимумів і мінімумів.

3. Функція, що визначена на відрізку, може досягнути екстремуму тільки у внутрішніх точках цього відрізка.

*Необхідна умова екстремуму.*

Якщо функція $f(x)$ має екстремум при $x = x_0$, то її похідна в цій точці дорівнює нулю, або нескінченості, або взагалі не існує. Із цього слідує, що точки екстремуму функції необхідно знаходити тільки серед тих, в яких її перша похідна $f'(x) = 0$, або не існує. Слід уяснити, що вказана ознака екстремуму є тільки необхідною, але не достатньою.

Вкажемо дві достатні умови існування екстремуму функції.

*Перша достатня умова існування екстремуму функції.*

Нехай точка $x = x_0$ є критичною точкою функції $f(x)$, а сама функція $f(x)$ неперервна та диференційована у всіх точках деякого інтервалу, який містить цю точку. Тоді:

1. Якщо при $x < x_0$ похідна функції $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, то при $x = x_0$ має місце максимум, тобто якщо при переході зліва направо через критичну точку перша похідна змінює знак з плюса на мінус, то в цій точці функція досягає максимуму.

2. Якщо при $x < x_0$ похідна функції $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, то при $x = x_0$ має місце мінімум, тобто, якщо при переході через критичну точку перша похідна функції змінює знак з мінуса на плюс, то в цій точці функція досягає мінімуму.

3. Якщо ж при переході через критичну точку перша похідна не змінює знак, то екстремуму немає.

*Друга достатня умова існування екстремуму функції.*

Якщо в точці $x = x_0$ перша похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю: $f'(x)=0$, то при $x = x_0$ має місце максимум, якщо $f''(x) < 0$, та мінімум, якщо $f''(x) > 0$. Якщо ж $f''(x) = 0$, то необхідно розглянути першу достатню умову існування екстремуму.

*Правило для дослідження функції на екстремум за допомогою першої похідної (перший спосіб).*

Для дослідження функції на екстремум за першою похідною необхідно:

1. Знайти $f'(x)$ – першу похідну функції.

2. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, а також визначити ті значення $x$, при яких $f'(x) = \infty$ або не існує (тобто: знайти критичні точки функції $f(x)$).

3. Всі критичні точки розташувати на числовій осі в порядку зростання їх абсцис.

4. В середині кожного із утворених інтервалів взяти будь-яку точку і встановити в цій точці знак першої похідної функції (похідна зберігає знак в кожному інтервалі між двома сусідніми критичними точками).

5. Розглянути знак $f'(x)$ в двох сусідніх точках, переходячи послідовно зліва направо від першого інтервалу до останнього. Якщо при такому переході знаки $f'(x)$ в двох сусідніх інтервалах різні, то екстремум в критичній точці є, і буде максимум, якщо знак змінюється з + на –, а мінімум, якщо знак змінюється з – на +. Якщо ж в двох сусідніх інтервалах має місце збереження знаку першої похідної, то екстремуму в розглянутій критичній точці немає.

6. Знайти значення функції в точках, де вона досягає екстремуму (екстремальні значення функції).

*Правило для дослідження функції на екстремум за другою ознакою*

*(другий спосіб)*

Для того, щоб дослідити на екстремум за другою похідною, необхідно:

1. Знайти $f'(x)$ – першу похідну функції.

2. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$.

3. Знайти $f''(x)$ – другу похідну функції.

4. Дослідити знак $f''(x)$ – другої похідної функції в кожній точці, що знайдено в пункті 2.

Якщо в розглянутій точці $f''(x) > 0$, то в цій точці буде мінімум, а якщо $f''(x) < 0$, то в цій буде максимум. Якщо в розглянутій точці $f''(x) = 0$, то дослідження необхідно провести за правилом першої похідної.

### 3. Знаходження асимптот графіка функції.

***Озн.*** Асимптотою кривої називається така пряма, до якої необмежено наближається точки кривої при необмеженому віддаленні її від початку координат. Крива може наближатися до своєї асимптоти тими ж способами, як і змінна до своєї границі: залишаючись з однієї сторони від асимптоти або з різних сторін, кілька раз перетинаючи асимптоту і переходячи з однієї сторони на другу.

Розрізняють асимптоти: вертикальні, горизонтальні і похилі.

Для знаходження асимптот керуються наступними правилами:

а) Якщо при $x = a$ крива $y = f\,(x)$ має розрив II-го роду, тобто якщо при $x \to a - 0$ або при $x \to a + 0$ функція прямує до нескінченості (того чи іншого знаку), то пряма $x = a$ являється вертикальною асимптотою;

б) Крива $\boldsymbol{y} = f\,(x)$ має горизонтальну асимптоту $y = b$ тільки в тому випадку, коли існує скінчена границя функції $f\,(x)$ при $x \to \infty$ або $x \to -\infty$, і ця границя дорівнює $b$, тобто, якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

в) Для знаходження похилої асимптоти $y = kx + b$ необхідно знайти невідомі коефіцієнти $k$ і $b$ за формулами:

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$ та $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right)$.

### 4. Застосування похідної до дослідження динаміки функції.

Загальне дослідження функції та побудову їх графіків зручно використовувати за наступною схемою:

1. Елементарні дослідження: знайти область визначення функції; точки перетину з осями координат; перевірити функцію на парність.
2. Знайти точки розриву функції та її односторонні границі.
3. Знаходження похилих асимптот.
4. Знайти точки екстремуму та інтервали зростання та спадання функції.
5. Побудувати графік функції, враховуючи всі одержані результати дослідження.

П р и к л а д: Дослідити функцію і побудувати її графік: $y=\frac{x}{x^2-1}$.

*Розв'язання:*

1. Елементарні дослідження:

Область визначення функції : $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$.

Точки перетину графіка функції з осями координат:

$(0;0)$ − єдина точка перетину з віссю абсцис та ординат.

Функція непарна, так як: $y(-x)=\frac{-x}{(-x)^2-1}=-\frac{x}{x^2-1}$. Отже графік функції симетричний відносно початку координат.

2. Дослідження точок розриву:

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{-0}=\infty;\quad \lim_{x\to-1-0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty;\quad \lim_{x\to1-0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{-0}=-\infty.$$

Отже, $x=-1$ і $x=1$ − вертикальні асимптоти.

3. Знаходження похилих асимптот:

Похилі асимптоти визначатимемо за формулою: $y=kx+b$. Для цього знайдемо невідомі коефіцієнти $k$ і $b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-1}=\left[\frac{0}{\infty}\right]=0.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Тоді рівняння асимптоти набуватиме вигляду: $y=0$.

4. Дослідження функції на монотонність:

Знайдемо першу похідну функції:

$$y'=\frac{(x^2-1)-x\cdot2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-2x^2-1}{(x^2-1)^2}=\frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2}=-\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}.$$

Прирівняємо першу похідну до нуля: $-\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}=0$.

Так як рівняння не має розв'язків, то критичних точок першого роду не має. Тому на числовій осі *0X* позначаємо лише точки розриву функції:

– – – $x$

**–1** **1**

Отже, функція спадає на всій області визначення.

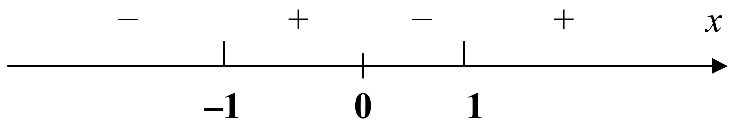
5. Дослідження на опуклість та ввігнутість:

Знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = \frac{-2x\cdot\left(x^2-1\right)^2+\left(1+x^2\right)\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4} = \frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)\cdot\left(-x^2+1-2+2x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

$$= \frac{2x\cdot\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

Прирівняємо другу похідну до нуля: $\frac{2x\cdot\left(x^2-2x-1\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=0$, $x=0$ − критична точка другого роду. Визначимо знаки другої похідної на отриманих інтервалах:




Отже, функція опукла вниз на проміжках: $x\in\left(-1;0\right)\cup\left(1;\infty\right)$, опукла вгору − $x\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(0;1\right)$. Точка (0; 0) – точка перегину.

6. Побудова графіка функції: