Лекція 5.

Тема: Пряма і площина в просторі.

1. Рівняння площини.
2. Рівняння площини, що проходить через три точки.
3. Кут між площинами.
4. Умова перпендикулярності та паралельності двох площин.
5. Відстань від точки до прямої.
6. Довжина відрізка.
7. Пряма в просторі.
8. Кут між двома прямими.
9. Умова перпендикулярності та паралельності двох прямих.
10. Площа трикутника.
11. Об'єм піраміди.

1. Рівняння площини.

Нехай маємо точку $M(x_0; y_0; z_0)$ і вектор $\vec{n}(A; B; C)$. Тоді рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\vec{n}$ і, що проходить через точку M запишеться у такому вигляді: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (1)

Або в загальному вигляді рівняння площини: $Ax+By+Cz+D=0$ (2)

Вектор $\vec{n}(A; B; C)$ називають нормальним вектором.

П р и к л а д : Скласти рівняння площини, яка перпендикулярна до осі Oy і проходить через точку M_0 *(–3; 4; 5)*.

Розв'язання: Орт $\vec{j}(0;1;0)$ перпендикулярний до площини, тому його можна розглядати як нормальний вектор. Отже, шукане рівняння має вигляд:
$0(x+3)+1(y-4)+0(z-5)=0$, або $y=4$.

2. Рівняння площини, що проходить через три точки.

Нехай на площині α задано три точки: $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій. Ці точки одночасно визначають площину. Знайдемо її рівняння. Візьмемо на площині довільну точку $M(x;y;z)$ і знайдемо вектори:

$$\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1).$$

Ці вектори лежать в площині α, тобто вони компланарні. Оскільки мішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю, то $\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$, або

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

Маємо рівняння площини, що проходить через три точки.

П р и к л а д: Записати рівняння площини, що проходить через точки:

A_1 (2; 3; –4); A_2 (5; 7; 9); A_3 (2;– 2; 4).

Розв'язання: Рівняння площини $A_1A_2A_3$ у загальному вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-x_a & y-y_a & z-z_a \\ x_в-x_a & y_в-y_a & z_в-z_a \\ x_c-x_a & y_c-y_a & z_c-z_a \end{vmatrix}=0, \text{ тобто } \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+4 \\ 5-2 & 7-3 & 9+4 \\ 2-2 & -2-3 & 4+4 \end{vmatrix}=0;$$

$$32(x-2)-15(z+4)-24(y-3)+65(x-2)=0 \Rightarrow 97x-24y-15z-182=0.$$

3. Кут між площинами.

Нехай задано дві площини α_1 та α_2 рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Двогранний кут між площинами вимірюється лінійним кутом, який дорівнює куту між нормальними векторами $\vec{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{n}_2(A_2;B_2;C_2)$ цих площин. Тоді косинус кута дорівнює:

$$cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (4)$$

П р и к л а д : Знайти кут між площинами $2x+y+3z-1=0$ і $x+y-z+5=0$.

Розв'язання: За формулою (4) маємо $cos\varphi = \dfrac{2\cdot 1+1\cdot 1+3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=0$,

отже дані площини перпендикулярні.

4. Умова перпендикулярності та паралельності двох площин.

Якщо площини α_1 та α_2 перпендикулярні, то скалярний добуток їхніх нормальних векторів дорівнює нулю, тобто рівність:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \tag{5}$$

Є умовою перпендикулярності площин.

Якщо площини α_1 та α_2 паралельні, то координати їхніх нормальних векторів пропорційні, тобто умовою паралельності площин є рівність відношень:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \tag{6}$$

5. Відстань від точки до прямої.

Якщо задане рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ площини α і точка $M(x_0;y_0;z_0)$, що не лежить на цій площині, то відстань d від точки M до площини α знаходиться за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{7}$$

П р и к л а д : Знайти висоту піраміди, заданої своїми вершинами A_1 *(–1; 2; –1); A_2 (1; 0; 2); A_3 (0; 1; –1); A_4 (2; 0; –1).*

Розв'язання: Рівняння площини основи, що проходить через точки A_2, A_3, A_4:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0, \text{ звідки } 3x+6y+z-5=0.$$

Висоту знайдемо як відстань від точки A_1 *(–1; 2; –1)* до площини $A_2A_3A_4$:

$$A_1H=\frac{|-3+12-1-5|}{\sqrt{3^2+6^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{46}}.$$

6. Довжина відрізка.

Нехай маємо точки $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$, тоді відстань між цими точками можна обчислити за формулою:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{8}$$

П р и к л а д : Обчислити довжину відрізка A_1A_2, якщо A_1 *(2; 3; –4)*; A_2 *(5; 7; 9)*.

Розв'язання: $A_1A_2 = \sqrt{(5-2)^2 + (3-7)^2 + (-4-9)^2} = \sqrt{9+16+169} = \sqrt{194} \approx 14\textit{од}.$

7. Пряма в просторі.

Нехай в просторі в прямокутній системі координат задано пряму точкою $M(x_0; y_0; z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s}(m; n; p)$, тоді канонічне рівняння прямої в просторі:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \tag{9}$$

Нехай в просторі в прямокутній системі координат задано пряму двома точками $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$, тоді рівняння прямої матиме вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{10}$$

П р и к л а д : Записати рівняння прямої A_1A_2, якщо A_1 *(2; 3; –4)*; A_2 *(5; 7; 9)*.

Розв'язання: Для прямої A_1A_2: $\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-3}{7-3} = \frac{z-(-4)}{9-(-4)} \Rightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{13}$.

8. Кут між двома прямими.

Нехай прямі *a* і *b* задано рівняннями: $\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} = \frac{z - z_1}{a_z}$ і $\frac{x - x_1}{b_x} = \frac{y - y_1}{b_y} = \frac{z - z_1}{b_z}$. Кут між цими прямими дорівнює куту між їхніми напрямленими векторами $\vec{s}_1(a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{s}_2(b_x; b_y; b_z)$, тоді косинус кута між цими прямими дорівнює: $\cos A = \dfrac{a_x в_x + a_y в_y + a_z в_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{в_x^2 + в_y^2 + в_z^2}}$ (11)

П р и к л а д : Обчислити косинус кута $A_3A_1A_2$, якщо $A_1(2;\ 3;\ -4);\ A_2(5;\ 7;\ 9);\ A_3(13;\ 1;\ 2)$.

Розв'язання: Враховуючи, що рівняння прямої можна подати у вигляді:

$\dfrac{x - x_1}{a_x} = \dfrac{y - y_1}{a_y} = \dfrac{z - z_1}{a_z}$, то для прямої A_1A_2 $\vec{a}\ (3;\ 4;\ 13)$, а для A_1A_3 $\vec{в}\ (11;\ -2;\ 6)$.

Тоді $\cos A = \dfrac{3 \cdot 11 + 4 \cdot (-2) + 13 \cdot 6}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 13^2}\sqrt{11^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \dfrac{103}{\sqrt{194} \cdot \sqrt{161}} \approx 0{,}5829$.

Отже, $\angle A = \arccos 0{,}5829 = 53^{\circ}30'$.

9. Умова перпендикулярності та паралельності двох прямих.

Прямі a і b задано рівняннями: $\dfrac{x - x_1}{a_x} = \dfrac{y - y_1}{a_y} = \dfrac{z - z_1}{a_z}$ і $\dfrac{x - x_1}{b_x} = \dfrac{y - y_1}{b_y} = \dfrac{z - z_1}{b_z}$.

Тоді умова перпендикулярності прямих матиме вигляд:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \qquad (12)$$

Умова паралельності:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \qquad (13)$$

10. Площа трикутника.

Нехай маємо точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ та $A_3(x_3; y_3; z_3)$. Площу трикутника $A_1A_2A_3$ обчислимо, користуючись властивістю добутку векторів A_1A_2 і A_1A_3: $S_\Delta = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}\right|$, де $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} y_в - y_a & z_в - z_a \\ y_c - y_a & z_c - z_a \end{vmatrix} \cdot \vec{i} +$

$$+ \begin{vmatrix} x_в - x_a & z_в - z_a \\ x_c - x_a & z_c - z_a \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_в - x_a & y_в - y_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a \end{vmatrix} \cdot \vec{k}. \qquad (14)$$

П р и к л а д : Дано координати $A_1\ (2;\ 3;\ -4);\ A_2\ (5;\ 7;\ 9);\ A_3\ (2; -2;\ 4)$. Обчислити площу трикутника $A_1A_2A_3$.

Розв'язання: $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}\right|$,

де $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} 4 & 13 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = (32+65)\vec{i} + (24-0)\vec{j} +$

$+(-15-0)\vec{k} = 97\vec{i} + (-24)\vec{j} + (-15)\vec{k}$.

Тоді: $\left|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{97^2 + (-24)^2 + (-15)^2} = \sqrt{10210}$.

Отже, $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10210} \approx 50$*кв.од.*

11. Об'єм піраміди.

Нехай задано піраміду вершинами $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$ та $A_4(x_4; y_4; z_4)$, тоді її об'єм дорівнює:

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_в - x_a & y_в - y_a & z_в - z_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a & z_c - z_a \\ x_д - x_a & y_д - y_a & z_д - z_a \end{vmatrix} \tag{15}$$

П р и к л а д : Дано координати A_1 *(2; 3; –4); A_2 (5; 7; 9); A_3 (2;– 2; 4); A_4 (13; 1; 2)* вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти об'єм піраміди.

Розв'язання: Об'єм піраміди обчислимо за попередньою формулою, тоді:

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 13 \\ 0 & -5 & 8 \\ 11 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}(-90+352+715+48) = 170\frac{5}{6} куб.од.$$