Лекція 7.

Тема: Функція. Основні елементарні функції.

1. Поняття функції.

2. Способи задання функцій.

3. Класифікація елементарних функцій: лінійна функція, обернена пропорційність, квадратична функція.

4. Монотонні функції.

5. Парні та непарні функції.

6. Періодичні функції.

7. Перетворення графіка функцій.

1. Поняття функції.

Вивчаючи те чи інше явище, ми, як правило, оперуємо кількома величинами, які пов'язані між собою так, що зміна деяких з них приводить до зміни інших. Такий взаємозв'язок у математиці виражається за допомогою *функції.* Цей термін вперше ввів Г. Лейбніц.

Приклади:

1. Під час вільного падіння тіла пройдений шлях S залежить від зміни часу t. Зв'язок між змінними величинами S і t задається формулою: $S = \frac{gt^2}{2}$, де g – прискорення при вільному падінні (стала величина). Величина S залежить від зміни величини, тобто шлях S є функцією часу.

2. Довжина l кола діаметра d визначається за формулою $l = \pi d$, де π – стала величина. Змінна l залежить від змінної величини d, тобто довжина кола l є функцією діаметра d.

Спільним у цих прикладах є те, що зв'язок між змінними величинами описується певним правилом (залежністю, законом, відповідністю) так, що кожному значенню однієї величини відповідає єдине значення другої.

Дамо тепер означення функції. Якщо кожному числу x з деякої числової множини X за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y, то кажуть, що *у* є функція від *х* і пишуть *у = f(x)*. Це означення належить М.І.Лобачевському і Л. Діріхле.

Озн. 1: Функцією називають відповідність між елементами двох множин *х* та *у*, при якій кожному елементові першої множини *х* відповідає не більше одного елемента *у* другої множини. Наприклад: $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x + 2$.

Змінна *х* називається незалежною змінною, або аргументом, а змінна ***у*** – залежною змінною, або функцією; під символом *у = f(x)* розуміють те правило, за яким кожному *х* відповідає *у,* або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб дістати відповідне значення функції.

Приклад:

Знайти значення функції $y = x^2 - 2x + 1$ в точці $x = 2$.

Так, як $x = 2$, то підставимо у функцію це значення: $y(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1$.

Множина *Х* називається областю визначення функції. Множина *У* усіх чисел *у,* таких, що *у = f(x)* для кожного $x \in X$ називається множиною значень функції.

Озн. 2: Множина всіх тих елементів з *Х*, для яких є відповідні елементи множини *У*, називається областю визначення, а множина всіх тих елементів з *У*, що відповідають елементам з *Х*, − областю значень даної функції.

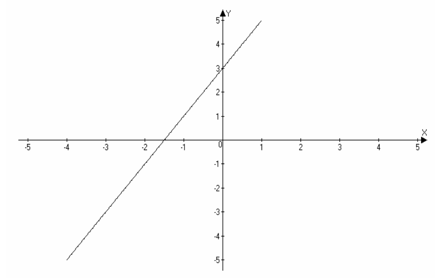
Приклад:

Для функції *у = х + 4* область визначення – всі дійсні числа: $x \in R$. Область значень – це також множина всіх дійсних чисел: $y \in R$.

Для функції $y = \frac{4}{x}$ область визначення $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, область значень $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Озн. 3: Графіком функції *f* називається множина точок (*х;у*) на координатній площині, таких, що перебігають всю множину D(*f*), а *у = f(x)*.

Приклад: Побудувати графік функції $y = 2x + 3$.



2. Способи задання функцій.

Основними способами задання функції є аналітичний, графічний і табличний спосіб.

При *аналітичному способі* задання функції відповідність між аргументом і функцією задається формулою (аналітичним виразом), де зазначено, які дії потрібно виконати над значенням аргументу та сталими числами, щоб дістати відповідне значення функції.

При *графічному способі* задання функції $y = f(x)$ відповідність між змінними x і y задається графіком – множиною точок $(x; y)$ площини, координати яких задовольняють рівність $y = f(x)$. Залежно від того, яку задано функцію, графік її може складатись з однієї суцільної лінії, кількох ліній, дискретної множини точок площини тощо.

Графічним способом задання функції широко користуються при дослідженнях, пов’язаних з використанням таких самописних приладів, як барограф (для запису змін атмосферного тиску), осцилограф (для запису змін електричного струму або напруги), електрокардіограф (для запису електричних явищ, пов’язаних з діяльністю серця), термограф (для запису змін температури повітря) тощо. Криві (їх називають відповідно барограма, осцилограма, електрокардіограма, термограма), що їх виписують прилади, задають цілком певну функцію, властивості якої характеризують перебіг того чи іншого процесу.

Табличний спосіб задання функції $y = f(x)$ полягає в тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці.

Табличний спосіб досить часто використовується при проведенні експериментів, коли задають певну сукупність $x_1, x_2 \ldots, x_n$ значень аргументу і дослідним шляхом знаходять відповідні значення функції: $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Якщо функція задана аналітично, то для неї можна побудувати таблицю, тобто табулювати функцію. Табулюються, як правило, функції які виражаються складною формулою, але часто зустрічаються в практиці Такими є, наприклад, таблиці логарифмів, тригонометричні таблиці тощо.

Крім розглянутих існують й інші способи задання функції. Так, функцію можна задати словесним описом залежності між змінними.

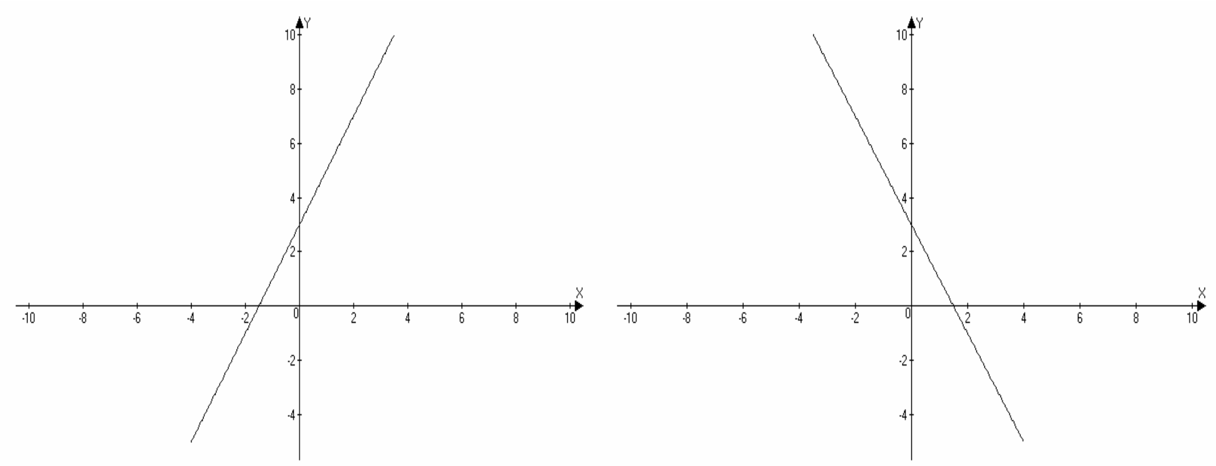
3. Класифікація елементарних функцій:

Лінійна функція.

Озн. 4: Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою $y = ax + b$, де x – аргумент, a і b – будь-які числа.

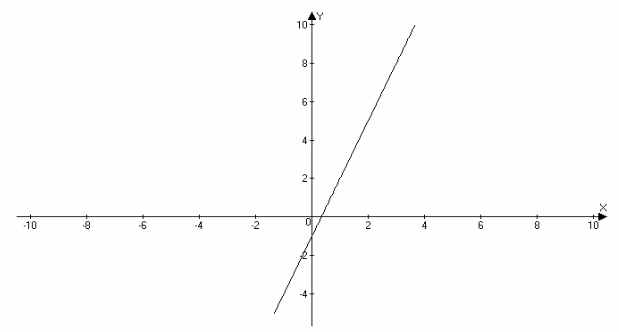
1. Область визначення: $x \in (-\infty;+\infty)$.
2. Область значень: $y \in (-\infty;+\infty)$.
3. При a > 0 функція зростає, при a < 0 – спадає.

Графіком функції є пряма:



$a > 0$ $a < 0$

Для побудови графіка необхідно мати дві точки. Наприклад, для функції $y = 3x - 1$, задамо $x = 0$, тоді $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$. Маємо точку з координатами *(0; –1)*. Першу координату називають абсцисою, а другу – ординатою. Відповідно і вісь X називають віссю абсцис, а вісь $У$ – ординат. Аналогічно задамо другу точку: $x = 1$, тоді $y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$. Отримали другу точку *(1; 2)*. Через дані точки можна побудувати пряму: $y = 3x - 1$.



Можна зробити висновок, що зі збільшенням ординати, абсциса також збільшується. Причому, якщо збільшити ординату на одиницю, то й абсциса збільшиться на одиницю. Якщо зменшити ординату на 13, наприклад, то й абсциса зменшиться на 13. Тобто лінійна функція є функцією прямої пропорційності.

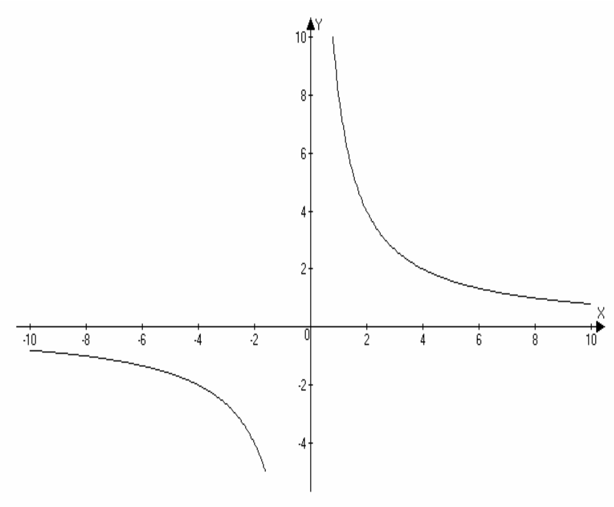
Обернена пропорційність.

Озн. 5: Змінну y називають обернено пропорційною до змінної x, якщо відповідні значення цих змінних зв'язані рівністю $y=\frac{k}{x}$, де k – якесь дійсне число, відмінне від нуля. Число k називають коефіцієнтом оберненої пропорційності. Жодна з змінних не може набувати значення 0.

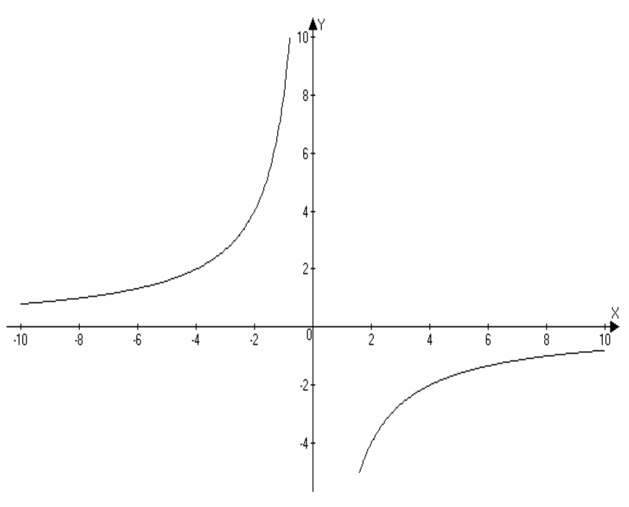
1. Область визначення: $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

2. Область значень: $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

3. При $k>0$ функція спадає, при $k<0$ – зростає на всій області визначення.



k>0



k<0

Графіком цієї функції $y = \frac{k}{x}$ є крива, що складається з двох гілок. Цю криву називають гіперболою.

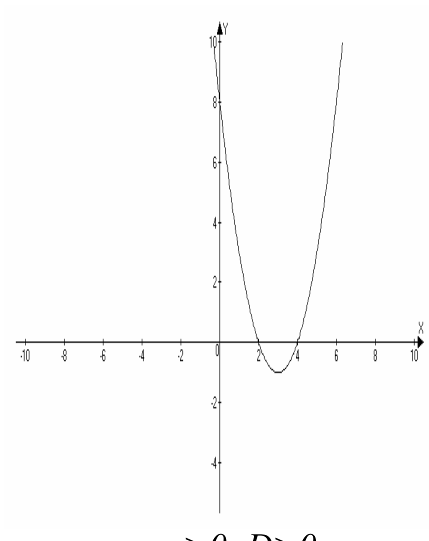
Зауважимо, що графіками функцій $y = \frac{1}{x} + 3$, $y = \frac{3}{x-2}$, $y = \frac{x+3}{x-2}$ теж є гіперболи, однак вони – необернено пропорційні. Це приклади дробово-раціональних функцій. Обернена пропорційність є найпростішим випадком дробово-раціональних функцій.

Квадратична функція.

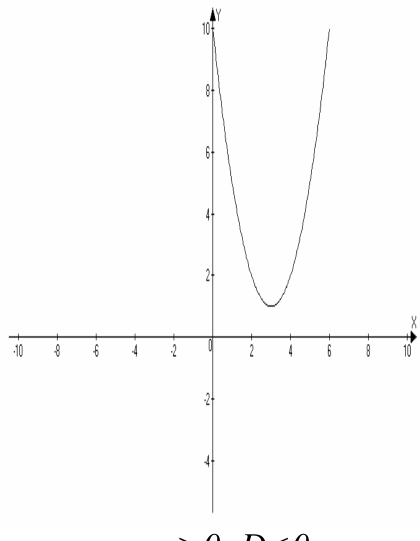
Озн. 6: Квадратичною називають функцію, яку можна задати формулою $y=ax^2+bx+c$, де x – змінна, $a \neq 0$, b і c – числа.

1. Область визначення: $x \in (-\infty;+\infty)$.
2. Область значень: $y \in (-\infty;+\infty)$.

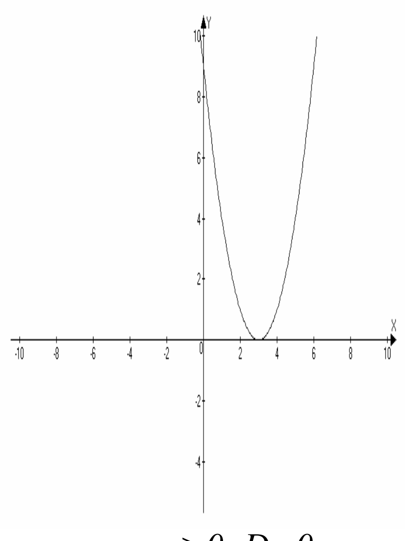
Графіком квадратичної функції є парабола, її гілки напрямлені вгору, якщо a>0, гілки напрямлені вниз, якщо $a < 0$. Вершина цієї параболи має координати $\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$.



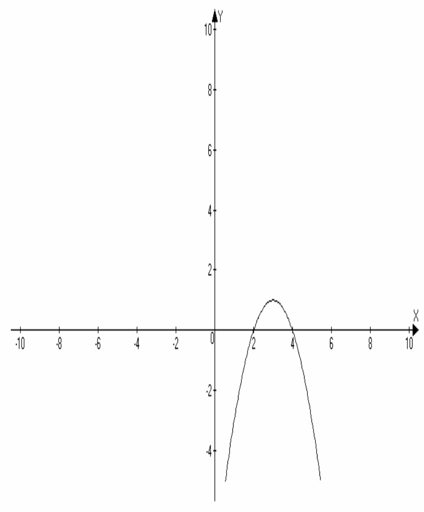
a>0, D>0



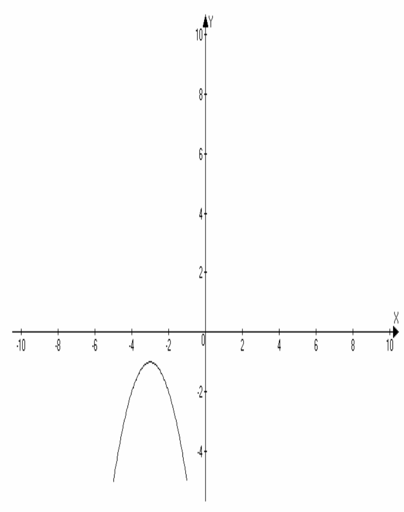
a>0, D<0



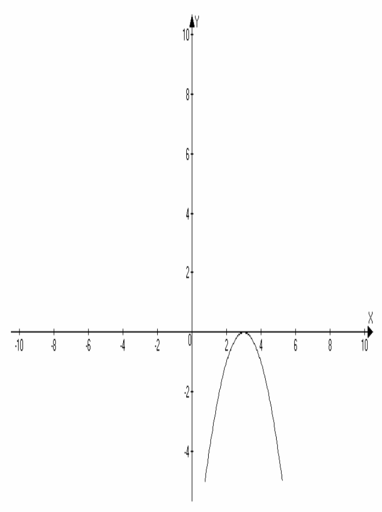
a>0, D=0



$a<0,\ D>0$



$a<0,\ D<0$



$a<0,\ D=0$

Якщо дискримінант квадратного тричлена ax^2+bx+c додатній, парабола перетинає вісь абсцис у двох точках, що є коренями рівняння: $ax^2+bx+c=0$. Якщо дискримінант дорівнює 0, то графік функції дотикається до осі абсцис, причому абсциса дотику є коренем рівняння $ax^2+bx+c=0$. Якщо дискримінант від'ємний, то графік функції не перетинає вісь абсцис.

4. Монотонні функції.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині A. Якщо для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу, взятих із множини A, з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що:

а) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається зростаючою;

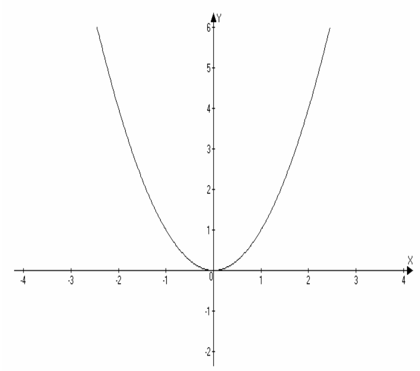
б) $f(x_1) \le f(x_2)$, то функція називається неспадною;

в) $f(x_1) > f(x_2)$, функція називається спадною;

г) $f(x_1) \ge f(x_2)$, функція називається незростаючою.

Нехай функція не є монотонною в усій своїй області визначення, але цю область можна розбити на деяке (скінченне чи нескінченне) число проміжків, які не перетинаються і на кожному з яких функція монотонна. Такі проміжки називаються *проміжками монотонності функції.*

Так, функція $y = x^2$ не є монотонною на всій числовій осі, але має два проміжки монотонності: $(-\infty;0)$ та $(0;+\infty)$; на першому з них функція спадає, а на другому – зростає.



5. Парні та непарні функції.

Нехай функція *f(x)* визначена на множині *A*. Функцію *f(x)* називають парною, якщо $f(-x)=f(x),\ x \in A$ і непарною, якщо $f(-x)=-f(x),\ x \in A$.

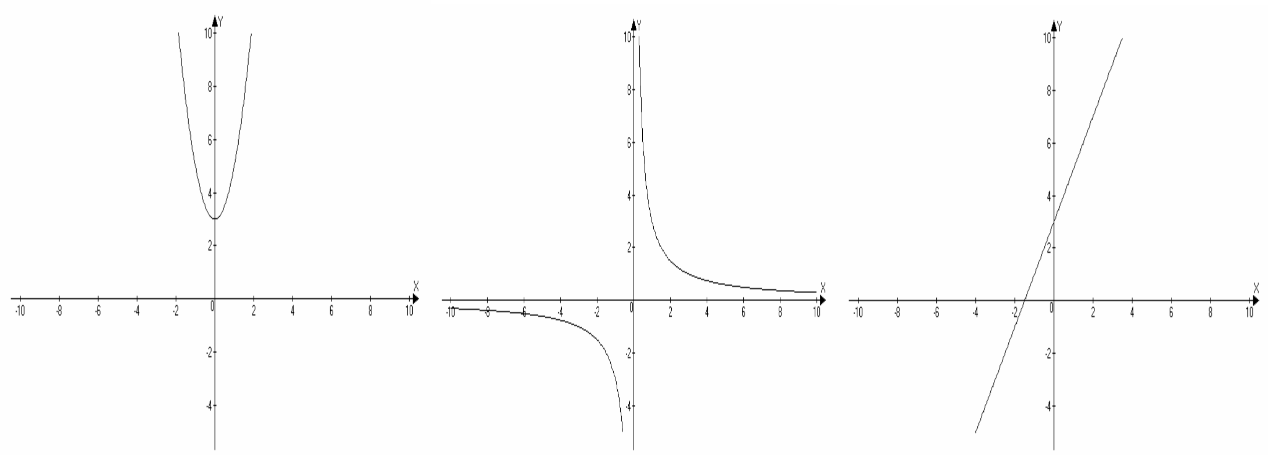
Графік парної функції симетричний відносно осі *Oy,* а непарної – відносно початку координат.

Приклади:

Функція $y = 2x^2 + 3$ є парною. Її графік симетричний відносно осі *Oy*.

Функція $y = \dfrac{3}{x}$ не непарною. Її графік симетричний відносно початку координат

Функція $y = 2x + 3$ не є парною та не непарною. Така функція називається ні парною ні непарною.



а) *б)* *в)*

6. Періодичні функції.

Функція *f(x),* визначена на всій числовій прямій, називається *періодичною,* якщо існує таке число *T,* що $f(x+T)=f(x)$. Число *T* називається *періодом* функції.

Якщо T – період функції, то її періодами є також числа $кT$, де $k \in Z$. Найменший з додатних періодів функції, якщо такий існує, називається основним періодом функції.

З означення випливає, що для побудови графіка періодичної з періодом T функції досить побудувати її графік на довільному проміжку довжини T, а потім продовжити цей графік на всю область визначення, повторюючи його через кожний проміжок довжини T.

Приклад:

Періодичними є тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$ з періодом 2π та $y = tgx$, $y = ctgx$ з періодом π .

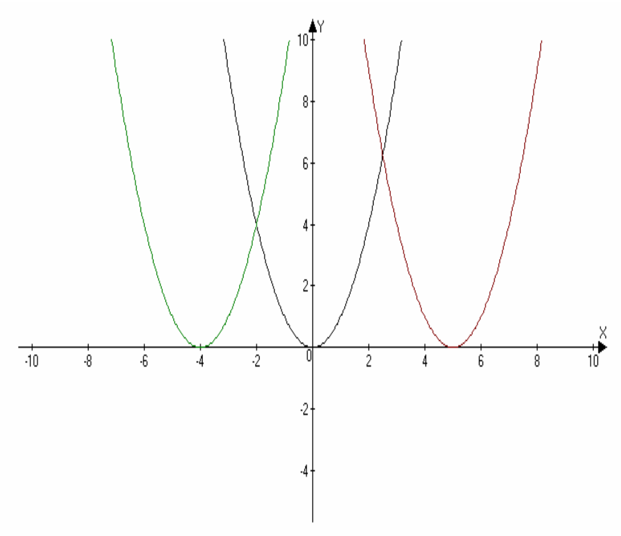
Періодичні функції відіграють важливу роль для математичного опису періодичних явищ, що спостерігаються в природі. Характерною особливістю цих явищ є періодичне повторення їх через певні проміжки часу. Прикладами можуть бути рух маятника навколо осі, рух небесних тіл (планети рухаються по еліптичних орбітах), робота майже всіх машин і механізмів пов'язана з періодичним рухом (рух поршнів, шатунів тощо).

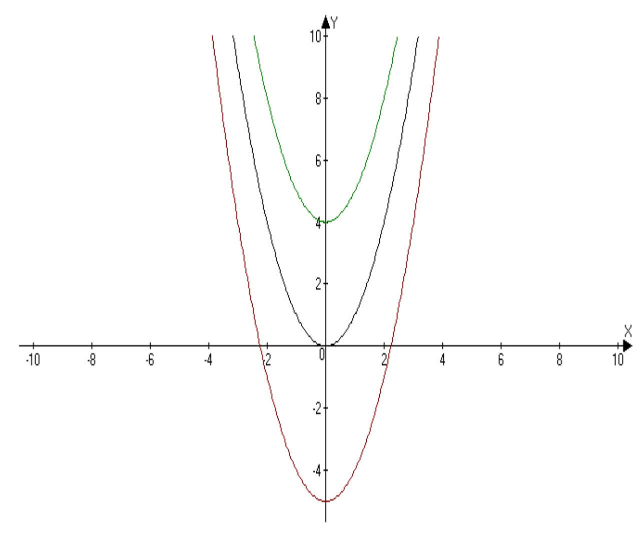
7. Перетворення графіка функцій.

Графіки основних елементарних функцій треба пам'ятати. Перетворюючи їх можна дістати графіки багатьох інших функцій. Нехай відомо графік функції $y = f(x)$, розглянемо деякі перетворення цього графіка.

1. Графік функції $y = f\left(x\right) + b$ дістаємо паралельним перенесенням $y = f\left(x\right)$ вздовж осі Oy на величину, що дорівнює b.

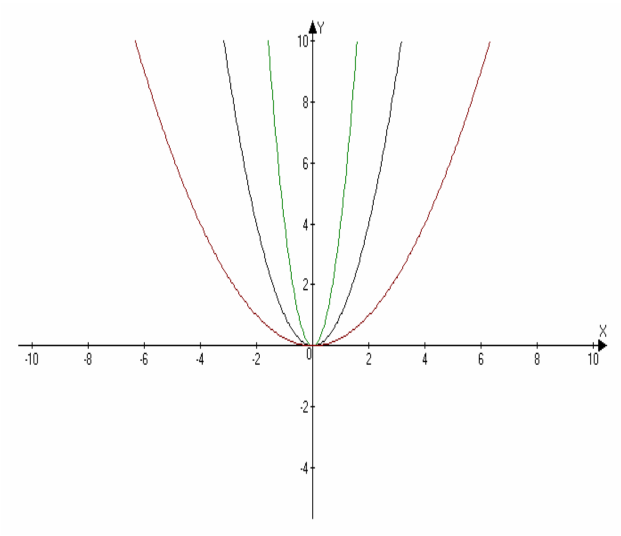
2. Графік функції $y = f\left(x + a\right)$ дістаємо паралельним перенесенням $y = f\left(x\right)$ вздовж осі Ox на величину, що дорівнює a.

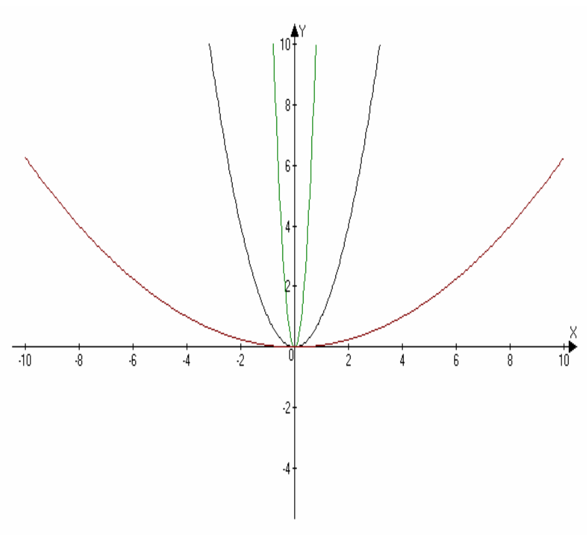




3. Графік функції $y = cf(x)$, $c \neq 0$ дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ при *0<c<1* за допомогою стискування в $\frac{1}{c}$ разів ординат останнього, а при *c>1* за допомогою розтягування в с разів його ординат із збереженням відповідних абсцис.

4. Графік функції $y = f(kx)$, $k \neq 0$ дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ при *0<k<1* за допомогою збільшенням в $\frac{1}{k}$ разів абсцис його точок, а при *k>1* зменшенням в k разів абсцис його точок із збереженням їхніх ординат.

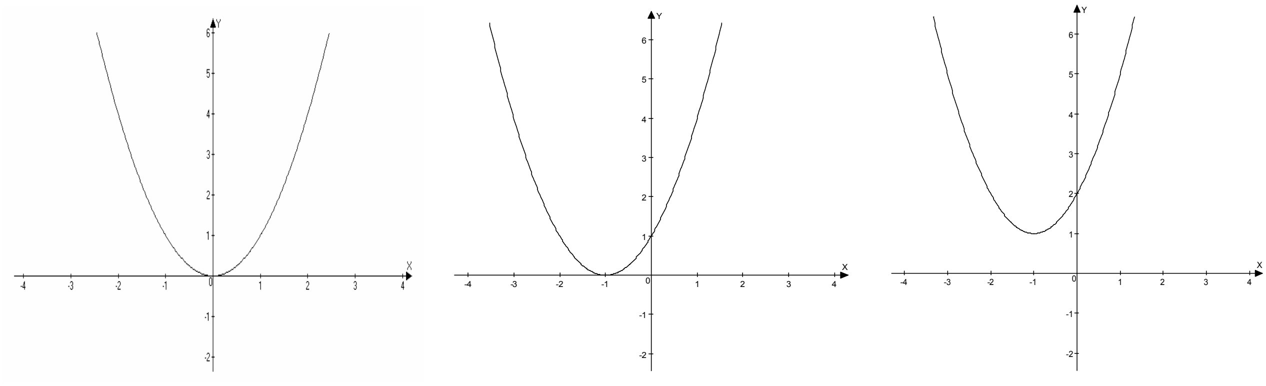




<u>Приклад:</u> Користуючись графіком функції $y = x^2$, побудувати графік функції $y = (x+1)^2 + 1$.

Розв'язання:

Виходячи з графіка функції $y = x^2$ (*рис. а*), спочатку побудуємо графік функції $y = \left(x+1\right)^2$ перенесенням графіка $y = x^2$ відносно осі Ох вліво на 1 одиницю (*рис. б*). А потім $y = \left(x+1\right)^2$ перенесемо вгору на 1 одиницю (*рис. в*).



а) *б)* *в)*