Лекція 8.

Тема: **Границя функції. Застосування правил розкриття невизначеностей, утворених алгебраїчними виразами. Дві визначні та три необхідні границі.**

1. Границя функції.

2. Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ від раціональних дробів.

3. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ від раціональних дробів.

4. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ від ірраціональних дробів.

5. Невизначеність типу $[\infty-\infty]$.

6. Перша визначна границя.

7. Друга визначна границя.

8. Перша необхідна границя.

9. Друга необхідна границя.

10. Третя необхідна границя.

1. Границя функції.

Стале число a називають границею змінної величини x, якщо для будь-якого насамперед заданого числа $\varepsilon \geq 0$ можна вказати таке значення змінної x, що всі наступні значення змінної будуть задовольняти нерівності $|x-a| \leq \varepsilon$.

Якщо число a є границею змінної величини x, то говорять, що x прямує до границі a, і пишуть $x \to a$ або $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

Границя сталої величини дорівнює самій сталій, тобто $\lim\limits_{x \to a} C = C$. Із визначення границі змінної слідує, що змінна величина не може мати двох границь, це число єдине.

Озн. 1:Границею функції $y = f(x)$ при x, що прямує до a, називається таке число b, якщо для будь-якого числа $\varepsilon \geq 0$ існує число $\delta \geq 0$, таке, що для всіх x, які задовольняють нерівність $0 \leq |x-a| \leq \delta$ випливає $|f(x)-b| \leq \delta$.

Позначають $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

В теорії границь нуль – це мале число, а нескінченність – велике.

Зауваження: $\frac{a}{0} = \infty$; $\frac{a}{\infty} = 0$.

2. Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ від раціональних дробів.

Для розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ необхідно чисельник і знаменник поділити на x^n, де $n-$ найбільше значення степеня.

<u>Приклад:</u> $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 5x + 6}{7x^2 + 9x + 4} = \left[\frac{3 \cdot \infty^2 + 5 \cdot \infty + 6}{7 \cdot \infty^2 + 9 \cdot \infty + 4}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Найбільше значення степеня n=2, тому ділимо чисельник і знаменник на x^2:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{6}{x^2}}{\frac{7x^2}{x^2} + \frac{9x}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{7 + \frac{9}{x} + \frac{4}{x^2}} = \left[\frac{3 + \frac{5}{\infty} + \frac{6}{\infty^2}}{7 + \frac{9}{\infty} + \frac{4}{\infty}}\right] = \frac{3+0+0}{7+0+0} = \frac{3}{7}.$$

3. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ від раціональних дробів.

Для розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ від раціональних дробів необхідно розкласти чисельник і знаменник на множники і однакові скоротити.

<u>Приклад:</u> $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2 + 5x - 8}{3x^2 - 5x + 2} = \frac{3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 8}{3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

Розкладаємо квадратичні вирази на множники за теоремою Вієта і отримаємо:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(3x+8)}{(x-1)(3x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{3x+8}{3x-2} = \frac{3 \cdot 1 + 8}{3 \cdot 1 - 2} = \frac{11}{1} = 11, \text{ (скоротили на } x-1\text{)}.$$

4. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ від ірраціональних дробів.

Для розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ від ірраціональних дробів необхідно позбавитись від ірраціональності помноживши чисельник і знаменник на спряжений вираз. Спряженими називають такі ірраціональні вирази, які при множенні один на інший утворюють раціональні вирази.

<u>Приклад:</u> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\frac{\sqrt{4-0}-\sqrt{4+0}}{0}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-x-4-x}{x\cdot(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\cdot(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

5. Невизначеність типу $[\infty-\infty]$.

Для розкриття невизначеності $[\infty-\infty]$ необхідно вираз представити у вигляді дробу $\frac{a}{1}$; в утвореному дробі помножити чисельник і знаменник на спряжений вираз. В подальшому позбавитися утвореної невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

<u>Приклад:</u> $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)=\left[\sqrt{\infty}-\infty\right]=[\infty-\infty]$.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}-4x}{1}\cdot\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2+10x+5-16x^2}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Поділимо кожен елемент чисельника і знаменника на x, під коренем на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}}{x}+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{16x^2+10x+5}{x^2}}+4}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{10 + \frac{5}{x}}{\sqrt{16 + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^2}} + 4} = \frac{10 + \frac{5}{\infty}}{\sqrt{16 + \frac{10}{\infty} + \frac{5}{\infty^2}} + 4} = \frac{10+0}{\sqrt{16+0+0}+4} =$$

$$\frac{10}{\sqrt{16}+4} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

6. Перша визначна границя.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\ x}{x} = 1 \qquad (1)$$

<u>Приклад:</u> $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{3x}$.

Скористаємося першою визначною границею: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\ x}{x} = 1$. Введемо заміну $7x = y \Rightarrow y \to 0$ при $x \to 0$.

Маємо: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{3\cdot\frac{y}{7}} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{7}{3}\cdot\frac{\sin y}{y} = \frac{7}{3}\cdot 1 = \frac{7}{3}$.

7. Друга визначна границя.

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{an+в} = e^a,\ e \approx 2{,}72 \qquad (2)$$

<u>Приклад:</u> $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x-1}$.

Безпосередня підстановка $x = \infty$ дає невизначеність $\left[1^\infty\right]$, тому скористаємося другою визначною границею: $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{an+в} = e^a$.

Введемо заміну $1+\frac{1}{n} = \frac{x-3}{x+2}$. Зведемо до спільного знаменника і виразимо *x* через *n*: $x = -5n-2$. При чому, якщо $x\to\infty$, то $n\to-\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x-1} = \lim_{n\to-\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\cdot(-5n-2)-1} = \lim_{n\to-\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-10n-4-1} = e^{-10} = \frac{1}{e^{10}}.$$

8. Перша необхідна границя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \tag{3}$$

<u>Приклад:</u> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+7x)}{3x}$.

Безпосередня підстановка $x=0$ дає невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, тому скористаємося першою необхідною границею: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Введемо заміну $7x=y\Rightarrow x=\frac{1}{7}y$. Якщо $x\to 0$, то $y\to 0$, тоді:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{3\cdot\frac{y}{7}}=\lim_{y\to 0}\frac{7}{3}\cdot\frac{\ln(1+y)}{y}=\frac{7}{3}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\frac{7}{3}\cdot 1=\frac{7}{3}.$$

9. Друга необхідна границя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \tag{4}$$

<u>Приклад:</u> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-5^x}{x}$.

Безпосередня підстановка $x=0$ дає невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, тому скористаємося другою необхідною границею: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Виносимо в чисельнику за дужки множник 5^x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^x-5^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5^x\left(\left(\frac{7}{5}\right)^x-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}5^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^x-1}{x}=1\cdot\ln\frac{7}{5}=\ln 7-\ln 5.$$

10. Третя необхідна границя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a \tag{5}$$

Приклад: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+12x)^4-1}{5x}$.

Безпосередня підстановка $x=0$ дає невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, тому скористаємося третьою необхідною границею: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x\right)^a-1}{x}=a$.

Введемо заміну: $12x=y\Rightarrow x=\dfrac{y}{12}$. Якщо $x\to 0$, то $y\to 0$, тоді:

$$\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^4}{5\cdot\dfrac{y}{12}}=\lim_{y\to 0}\frac{12}{5}\cdot\frac{(1+y)^4-1}{y}=\frac{12}{5}\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^4-1}{y}=\frac{12}{5}\cdot 4=\frac{48}{5}.$$